Ad-Soyad :

Numara :

Cevap Anahtarı

Lineer Cebir I Final Sınavı Soruları **05.01.2025**

NOT : Süre 90 dakikadır. Cevaplarınızı ayrıntılı biçimde yazınız. Sınıfta öğretilmeyen yöntemlerle yapılan çözümler kabul edilmez. Başarılar dileriz.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) Sonlu bir vektör uzayının her bazında aynı sayıda vektör vardır (2 p).

(Y) Her lineer denklem sisteminin çözümü vardır (2 p).

(D) Uzayda orijinden geçen her düzlem $\mathbb{R}^3$ ün bir alt vektör uzayıdır (2 p).

(D) Bir matrisin determinantı sıfır değilse tersi vardır (2 p).

(Y) Bir kare matriste iki sütun yer değiştirirse deteminant değişmez (2 p).

2) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ permütasyonu veriliyor.

a) σ yı ayrık dairesel permütasyonların çarpımı olarak yazınız (7 p)

b) σ yı transpozisyonların çarpımı olarak yazınız (7 p)

c) σ nın teklik - çiftlik durumunu ve işaretini belirleyiniz (6 p)

3) $\{v_1 = (4,2,-3),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (-2,-1,0)\}$ vektör kümesinin $\mathbb{R}^3$ ün bir bazı olup olmadığını araştırınız (20 p).

4) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A nın ekini bulunuz (7 p).

b) detA=? (6 p)

c) A nın tersini bulunuz (7 p).

5) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$ kümesi veriliyor.

a) U nun $\mathbb{R}^3$ ün alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz (10 p).

b) U için bir baz bulunuz (10 p).

6) nxn türündeki reel matrislerin kümesi M olmak üzere M nin toplama işlemine göre değişmeli grup olduğu biliniyor. M nin skalerle çarpma işlemiyle birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz (20 p).

2) a) $\sigma = (1,3,2)(4,5,6)$

b) $\sigma = (1,2)(1,3)(4,6)(4,5)$

c) σ da 4 adet transpozisyon var

$\Rightarrow \sigma$ çift permütasyondur

$\Rightarrow s(\sigma) = 1$ dir.

3) $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow c_1, c_2, c_3$ sıfır mı?

$c_1(4,2,-3) + c_2(2,1,1) + c_3(-2,-1,0) = (0,0,0)$ olsun.

$(4c_1 + 2c_2 - 2c_3,\ 2c_1 + c_2 - c_3,\ -3c_1 + c_2) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4c_1 + 2c_2 - 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ -3c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$ Homojen lineer denklem sistemi

Sistemin katsayılar matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{0} - \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{0} = 0$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ lineer bağımlıdır.

$\Rightarrow \mathbb{R}^3$ ün bazı değildir.

4) a) A nın eki, işaretli minörler matrisinin transpozu olup

$$\text{ek}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 3 \\ 7 & 5 & -11 \\ -9 & 6 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -9 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$

b) $$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{-7} + 3\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{5} = 29$$

c) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{ek}A = \frac{1}{29}\begin{bmatrix} 6 & 7 & -9 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & -11 & 10 \end{bmatrix}$$

5) a) $(0,0,0) \in U \Rightarrow U \neq \phi$

$\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U$, $\forall c \in \mathbb{R}$ alalım.

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in U \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ 2x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{array} \quad \ldots (1)$

$c(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in U$ mu?

$c(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (cx_1 + x_2, cy_1 + y_2, cz_1 + z_2)$

$2(cx_1 + x_2) + (cy_1 + y_2) - (cz_1 + z_2) = c\underbrace{(2x_1 + y_1 - z_1)}_{0} + \underbrace{(x_2 + y_2 - z_2)}_{0}$

((1) den) $= 0$

$\Rightarrow c(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in U$ olup U, $\mathbb{R}^3$ ün altvektör uzayıdır.

b) $\forall (x, y, z) \in U$ alalım.

$\Rightarrow 2x + y - z = 0$ lineer denklem

$\Rightarrow$ Katsayılar matrisi $[2 \ \ 1 \ \ -1] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} [1 \ \ \frac{1}{2} \ \ -\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow x$ temel, y ve z serbest değişken

$\Rightarrow y = s$, $z = t$ dersek

$x = -\frac{s}{2} + \frac{t}{2}$ olur.

$\Rightarrow (x, y, z) = (-\frac{s}{2} + \frac{t}{2}, s, t)$

$= (-\frac{s}{2}, s, 0) + (\frac{t}{2}, 0, t)$

$= s(-\frac{1}{2}, 1, 0) + t(\frac{1}{2}, 0, 1)$

$\Rightarrow U = sp\{(-\frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1)\}$ olup

$\{(-\frac{1}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, 0, 1)\}$, U için bir bazdır.

6) $M = \{A : A \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$

$\cdot : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ (skalerle çarpma)

$(c, A) \longrightarrow c.A$

$(M,+)$ değişmeli grup olduğu verildiğine göre vektör uzayı aksiyomlarının sağlandığını göstermeliyiz.

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\forall A_1, A_2 \in M$ alalım.

1) $(c_1 + c_2) A_1 = c_1 A + c_2 A_1$ (Matrislerin skalerle çarpım özelliklerinden)

2) $c_1 (A_1 + A_2) = c_1 A_1 + c_1 A_2$ " "

3) $(c_1 c_2) A_1 = c_1 (c_2 A_1)$ " "

4) $1.A = A$ " "

$\therefore M$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzayıdır.